第 37 卷第 1 期　　辽宁工程技术大学学报（自然科学版）　　2018 年 2 月
Vol.37　No.1　　Journal of Liaoning Technical University（Natural Science）　　Feb.　2018

李明宇,岳立柱,金珊.应用关系矩阵表示偏序集平均高度的方法[J].辽宁工程技术大学学报(自然科学版),2018,37(1):216-220. doi:10.11956/j.issn.1008-0562.2018.01.038
LI Mingyu,YUE Lizhu,JIN Shan. Method of applying relation matrix to express the average height of posets[J].Journal of Liaoning Technical University(Natural Science),2018,37(1):216-220. doi:10.11956/j.issn.1008-0562.2018.01.038

应用关系矩阵表示偏序集平均高度的方法

李明宇 [1]，岳立柱 [2]，金　珊 [3]

（1. 辽宁工程技术大学 工商管理学院，辽宁 阜新 123000；2. 辽宁工程技术大学 公共管理与法学院，辽宁 阜新 123000；3. 辽宁工程技术大学 矿业学院，辽宁 阜新 123000）

摘　要：针对计算不便制约偏序集决策方法应用的应用问题.在原偏序集比较与排序公式基础上，分析了偏序集上集、下集元素个数的计算过程，根据关系矩阵与偏序矩阵能够相互转换的原理，应用关系矩阵来表示上下集.证明发现，上集对应与关系矩阵的列向量，下集对应与关系矩阵的行向量；多个偏序集的合成可以转换为多个关系矩阵运算.结论表明，应用关系矩阵能大大简化运算，明显降低运算量.

关键词：偏序集；多准则决策；Hasse 图；关系矩阵；Hasse 矩阵

中图分类号：O 348.8　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1008-0562(2018)01-0216-05

Method of applying relation matrix to express the average height of posets

LI Mingyu[1], YUE Lizhu[2], JIN Shan[3]

**（1. College of Business Administration, Liaoning Technical University, Fuxin 123000, China;
2. School of Public Administration and Law, Liaoning Technical University, Fuxin 123000, China;
3. Institute of Mining Technology, Liaoning Technical University, Fuxin 123000, China）**

Abstract: To handle the calculation inconvenience restricting of the application of poset decision method, the calculation process of the element number in the upper set and lower set of poset is analyzed on the basis of the comparison and sorting formula of the original poset. According to the transduction principle between relation matrix and partial ordered matrix, the applied relation matrix can be obtained to signify the upper and lower sets. It is proved that the upper set corresponds to the column vectors in relation matrix and the lower set to the row vectors. The synthesis of multiple posets can be converted into the operations of multiple relation matrixes. The results show that the applied relation matrix can greatly simplify the operation and reduce the computational complexity.

Key words: poset; multiple criteria decision-making; Hasse chart; relation matrix, Hasse matrix

0　引言

偏序集分析方法是一个非常有吸引力的决策支持工具[1]，它不假定数据间是否具有线性关系，也不假定数据分布特征[2]，是一种鲁棒性较佳的决策方法.通过计算评价对象在偏序集上平均高度，根据高度的大小对方案进行比较和排序.目前，Brüggemann[3-4]等人提出的计算公式，由于计算简便，成为当前应用最多的方法之一.不过，该公式是一个近似算法，为了提高计算精度，Loof[5]改进了公式.不过，这两种计算方法仍然是复杂度较高的方法，当偏序集元素较多时，计算会变得困难.

对于一个偏序集而言，如果所有可能的线性扩展被发现，那么通过它可以计算单个元素的平均高度[6-7]，不过线性扩展的计算是 Sharp-P-complete

收稿日期：2016-11-24
基金项目：辽宁省教育厅基金（LJCR007）（LJCR010）
作者简介：李明宇（1974-），男，辽宁 阜新人，博士研究生，主要从事决策理论与方法等方面的研究. **本文编校**：史庆华

（P-complete）问题[8].Brüggemann 和 Loof 均是在偏序集上集、下集和区间集基础上，构造平均高度公式.如何计算偏序集的上集和下集，目前文献没有给出可操作性的方法，一般通过偏序集的 Hasse 图进行计算（或者 Hasse 矩阵）.不过，当方案数量较多时，该法计算费时费力，容易出错.例如，文献[9]中计算 13 个样本的上下集，有 3 个样本的计算存在错误，错误比率达 23.8%.鉴于通过 Hasse 图计算各方案的上下集容易出错，本文给出计算效率更高的方法.实际上，偏序集的 Hasse 矩阵与关系矩阵是一一对应的，文[10]给出二者相互转换的表达式.为此，本文从关系矩阵来展示偏序集上、下集的数学表达式，在此基础上给出简化的运算方法.

1　偏序集平均高度

1.1　偏序集基础概念

定义 1　设 R 是集合 A 上的一个二元关系，若 R 满足

（1）自反性　对任意 $x \in A$，有 xRx；

（2）反对称性　对任意 $x, y \in A$，若 xRy 且 yRx，则 $x = y$；

（3）传递性　对任意 $x, y, z \in A$，若 xRy 且 yRz，则 xRz.

则称 R 为 A 上的偏序关系[11].

定义 2　称 (A, IC, F) 为评估值模型，其中 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ 为评估对象或方案集，a_i 为第 i 个评估对象；$IC = \{c_1, c_2, \cdots, c_n\}$ 为评价准则集，c_l 为第 l 个评估准则；$F = \{f_l : A \to V_l \mid l = 1, 2, \cdots, m\}$ 为评估对象与评估准则之间的关系集，其中 $f_l(a_i)$ 表示评估对象 a_i 关于评估准则 c_l 的测定值，V_l 为属性 c_l 可能取值的全体，称为 c_l 的取值域[12].

由于各准则可能具有不同的量纲和类型，在决策前需要对各种数据进行规范化处理.设 $f_l(a_i)$ 经规范化处理后的值为 $c_l(a_i)$，$c_l(a_i)$ 表示 a_i 在准则 c_l 上规范化取值.

定义 3　称 (A, R) 为评估关系模型，其中 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ 为评估对象集，R 为评估对象之间的关系集，即 $R = (r_{ij})_{m \times m}$，其中 $R_{ij} = R\left(x_i, x_j\right)$ 表示 x_i 和 x_j 的一个二元关系[12].

在定义 1.3 中，若 $a_i \geqslant a_j$，则 $r_{ij}=1$，否则 $r_{ij}=0$，则称 $R = (r_{ij})_{m \times m}$ 为关系矩阵.在应用中，通常用“$\preceq$”表示偏序集关系，集合 A 和其上的偏序关系 $\preceq$ 一起称为偏序集，记为 $(A, \preceq)$。

评价集 $M = \left(A, IC, D\right)$ 构造的偏序集关系 $\preceq$，即对 $\forall x, y \in A$，有

$$x \preceq y \Leftrightarrow c_j(x) \le c_j(y), j = 1, 2, \cdots, n \quad （1）$$

由于 $\preceq$ 为 A 上的偏序关系，因此 $(A, \preceq)$ 为偏序集.为了区分由不同准则集生成的偏序关系，文献[8]用 (A, IC) 或 (A, IB) 表示偏序集 $(A, \preceq)$.为了避免理解上的歧义，下文在必要时用 $(A, \preceq_{IC})$ 表示偏序集 $(A, \preceq)$.

给定偏序集 $(A, \preceq)$，称集合 $O\left(x\right) := \left\{y \in A : y \preceq x\right\}$ 为 x 在 A 上的下集；称集合 $F\left(x\right) := \left\{y \in A : y \preceq x\right\}$ 为 x 在 A 上的上集；称集合 $U\left(x\right)$ 为 x 在 A 上的不可比集，其中 $U\left(x\right) = A - O\left(x\right) - F\left(x\right)$.令 $\left|O\left(x\right)\right|$、$\left|F\left(x\right)\right|$ 和 $\left|U\left(x\right)\right|$ 分别表示 $O\left(x\right)$、$F\left(x\right)$ 和 $U\left(x\right)$ 的元素个数.

1.2　偏序集平均高度

定义 4　设 $(A, \preceq)$ 为偏序集，$f : A \to B$ 是映射：若 $\forall x, y \in A$，$x \preceq y \Rightarrow f(x) \preceq f(y)$，则称 f 是单调映射（或称保序映射或序同态）.若 f 为保序的双射且 $f\left(x\right) \preceq f\left(y\right) \Rightarrow x \preceq y$，则称 f 为同构映射[13].

设 $(A, \preceq)$ 是偏序集，$(A, \preceq_L)$ 为一线性序，若存在映射 φ，φ 是从 $(A, \preceq_{IC_1})$ 到 $(A, \preceq_L)$ 上的保序映射，则称 $(A, \preceq_L)$ 为 $(A, \preceq_{IC_1})$ 的线性扩展.关于线性扩展的直观图解可参考文献[13].由于线性扩展 $(A, \preceq_L)$ 为一全序，将 m 个元素按由小到大分别赋予秩次 1,2，⋯，m.于是对 $\forall x \in A$，$rank(x) = i$ 表示 x 处于线性扩展上秩次为 i.对于 x 在 $(A, \preceq_{IC_1})$ 所有线性扩展上的秩均值 $\rho(x)$，Winkler 给出如下公式[6]

$$\rho(x) = \frac{\sum rank(x, linearorder\ j)}{LT}, \quad （2）$$

$rank(x, linear\ order\ j)$ 表示方案 x 在第 j 个线性扩展上的秩次，LT 表示 $(A, \preceq_{IC_1})$ 线性拓展的总数.对于式（2），另一种等价表示形式为[5]

$$\rho(x)=\sum_{i=1}^{n} i\cdot \mathrm{P}(rank(x)=i) \quad (3)$$

其中，$P(rank(x)=i)$ 表示 x 秩次等于 i 的概率.

根据式（2）或式（3）计算各方案的秩均值，通过秩均值对方案进行排序.给定一个偏序集 $(A,\preceq)$，式（2）和（3）的时间复杂度为 $O(n^2)$，随着方案数量的增加，会遇到难以计算的问题.

为了降低计算难度，Brüggemann 等[3,9]应用上集和下集提出了如下

$$\rho_2(x)=\frac{(m+1)\cdot|O(x)|}{|O(x)|+|F(x)|}, \quad (4)$$

文献[5]在式（4）基础上提出两个改进公式，在一定条件下提高了计算精度，但计算过程略显复杂.

$$\rho_2(x)=|O(x)|+\sum_{y\in U(x)}\frac{|O(x)\cap U(y)|}{|O(x)\cap U(y)|+|F(x)\cap U(y)|}, \quad (5)$$

$$\rho_3(x)=|O(x)|+\sum_{y\in U(x)}\frac{|O(x)|\cdot|F(y)|}{|O(x)|\cdot|F(y)|+|F(x)|\cdot|O(y)|}. \quad (6)$$

2　排序公式的矩阵表示

定理 1　若 $R=(r_{ij})_{m\times m}$ 为 $(A,\preceq)$ 的关系矩阵，H_R 为 Hasse 矩阵.则 A 的上集和下集元素个数为

$$|F(a_i)|=\sum_{t=1}^{m} r_{ti},|O(a_i)|=\sum_{t=1}^{m} r_{it}, \quad (7)$$

证明　若 $a_t\in F(a_i)$，根据上集概念知当 $a_i\preceq a_t$，有，$r_{ti}=1$；当 $a_t\notin F(a_i)$，则 $r_{ti}=0$，故 a_i 上集元素总数为 $\sum_{t=1}^{m} r_{ti}$；若 $a_t\in O(a_i)$，即根据下集知 $a_t\preceq a_i$ 时，有 $r_{it}=1$；当 $a_t\notin O(a_i)$，则 $r_{ti}=0$，故 a_i 下集元素总数为 $\sum_{t=1}^{m} r_{ti}$.证毕.

根据定理 1，式（4）和式（6）分别为

$$\rho_1(a_i)=(m+1)\sum_{t\in M} r_{it}\Big/\sum_{t\in M}(r_{it}+r_{ti}), \quad (8)$$

$$\rho_3(a_i)=\sum_{t\in M} r_{it}+\sum_{j\in M,r_{ij}+r_{ji}=0}\frac{\sum_{t\in M} r_{it}\cdot\sum_{t\in M} r_{tj}}{\sum_{t\in M} r_{it}\cdot\sum_{t\in M} r_{tj}+\sum_{t\in M} r_{ti}\cdot\sum_{t\in M} r_{jt}}, \quad (9)$$

定理 2　若 $R=(r_{ij})_{m\times m}$ 为 $(A,\preceq)$ 的关系矩阵，则集合 $O(x)\cap U(y)$ 和 $F(x)\cap U(y)$ 的元素个数分别为

$$|O(a_i)\cap U(a_j)|=\sum_{t=1}^{m} r_{it}\cdot k_{it}, \quad (10)$$

$$|F(a_i)\cap U(a_j)|=\sum_{t=1}^{m} r_{it}\cdot k_{it}, \quad (11)$$

式中，$\boldsymbol{K}=(k_{ij})_{m\times m}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}})$，$\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{R}$ 的转置矩阵，矩阵 $\boldsymbol{I}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 分别为

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{bmatrix},\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{bmatrix}. \quad (12)$$

证明　$\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{m\times m}$ 为 $(A,\preceq)$ 的关系矩阵，若方案 a_i 和 a_t 可比（$i\neq t$），则有 $r_{it}=1$，$r_{ti}=0$ 或 $r_{it}=0$，$r_{ti}=1$，整理有 $r_{it}+r_{it}=1,i\neq t$；若方案 a_i 和 a_t 不可比，则 $r_{it}=0$，$r_{ti}=0$，即 $r_{it}+r_{it}=0$.若 $i=t$，知 $r_{it}=r_{it}=1$ 则 $r_{it}+r_{it}=2$

记 $\boldsymbol{R}+\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}=(b_{ij})_{m\times m}$，由上述分析可知，当 $b_{it}=0$，表明方案 a_i 和 a_t 不可比；当 $b_{it}=1$，表明方案 a_i 和 a_t 是可比的.当 $b_{it}=2$，表明方案 $i=t$.

由于矩阵 $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{R}+\boldsymbol{R}^T$ 对角线元素均为 2，故 $\boldsymbol{K}$ 的对角元素值为零.由于矩阵 $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{E}$ 的非对角线元素均为 1，$\boldsymbol{R}+\boldsymbol{R}^T$ 非对角可比元素均为 1，则 $k_{it}=1$，表明方案 a_i 和 a_t 是不可比.当 $k_{it}=0$，表明方案 a_i 和 a_t 是可比的.

对于 $\forall a_t\in O(a_i)\cap U(a_j)$，等价于 $a_t\in O(a_i)$ 且 $a_t\in U(a_j)$，$r_{it}=1$，$r_{ti}=1$.由于 a_i 和 a_t 不可比，故 $r_{jt}=r_{tj}=1$，对应的 $k_{tj}=1$，于是 $\forall a_t\in O(a_i)\cap U(a_j)$ 等价表示为 $r_{it}=1$，$k_{tj}=1$.元素个数表示为 $|O(a_i)\cap U(a_j)|=\sum_{t=1}^{m} r_{it}\cdot k_{it}$.

式（11）同理可证，证略.证毕.

根据定理 2.2 知式（5）计算表达式分别为

$$\rho_2(a_i)=\sum_{t\in M} r_{it}+\sum_{j\in M,r_{ij}+r_{ji}=0}\frac{\sum_{t\in M} r_{it}\cdot(1-r_{jt}-r_{tj})}{\sum_{t\in M} r_{it}\cdot(1-r_{jt}-r_{tj})+\sum_{t\in M} r_{ti}\cdot(1-r_{jt}-r_{tj})} \quad (13)$$

定理 3　设 $R^1=(r_{ij}^1),R^2=(r_{ij}^2)$ 分别为偏序集 $(A,\preceq_1),(A,\preceq_2)$ 的关系矩阵，给定偏序集 $(A,\preceq)$，偏序关系 $\preceq$ 规定为：对于 $a_i,a_j\in A$，当且仅当 $a_i\preceq_1 a_j,a_i\preceq_2 a_j$，有 $a_i\preceq a_j$，则 $(A,\preceq)$ 的上集和下集元素个数分别为

$$F(a_i)=\sum_{t=1}^{m} r_{ti}^{1}\cdot r_{ti}^{2} \quad , \tag{14}$$

$$O(a_i)=\sum_{t=1}^{m} r_{it}^{1}\cdot r_{it}^{2} \quad . \tag{15}$$

证明　若 $R=(k_{ij})_{m\times m}$ 为 $(A,\preceq)$ 的关系矩阵.只需证明 $r_{ij}=r_{ij}^{1}\cdot r_{ij}^{2}$. $a_i\preceq_1 a_j, a_i\preceq_2 a_j$ ，有 $r_{ij}^{1}=1, r_{ij}^{2}=1$ ，显然 $r_{ij}^{1}\cdot r_{ij}^{2}=1$ ，此时 $a_i\preceq a_j$ ，$r_{ij}=1$，故有 $r_{ij}=r_{ij}^{1}\cdot r_{ij}^{2}$.

当其余三种情况，$r_{ij}^{1}=1$，$r_{ij}^{2}=0$，$r_{ij}^{1}=0$，$r_{ij}^{2}=1$，$r_{ij}^{1}=0$，$r_{ij}^{2}=0$，既有 $r_{ij}=r_{ij}^{1}\cdot r_{ij}^{2}=0$，综上可知 $r_{ij}=r_{ij}^{1}\cdot r_{ij}^{2}$，进一步，根据定理 1 可知（14）和式（15）成立.

3　算例对比分析

算例选自文献[9].在该文中，作者通过手工计算应用式（4）给出了各元素的平均高度值.运算的偏序集有 13 个元素，元素及元素间的关系展示见图 1.针对该偏序集，用本文方法计算各元素平均高度.

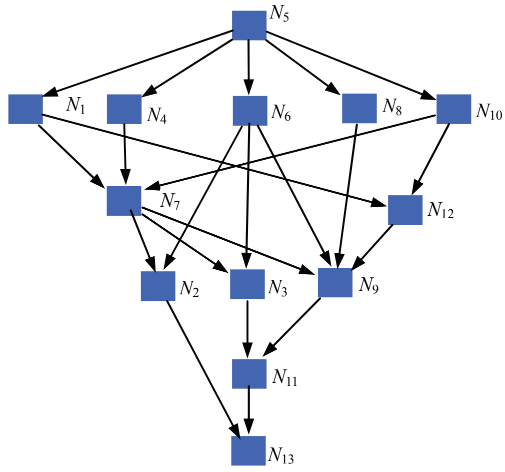

图 1　偏序集的 Hasse 图

Fig.1　load-step-AE count curve

根据本文的计算方法，首先得到该偏序集的比较矩阵，见表 1.

表 1　比较矩阵

Tab.1　comparison matrix

	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7	N_8	N_9	N_{10}	N_{11}	N_{12}	N_{13}
N_1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1
N_2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
N_3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
N_4	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1
N_5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
N_6	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1
$N7$	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1
N_8	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1
N_9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1
N_{10}	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1
N_{11}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
N_{12}	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1
N_{13}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

采用式（7）计算 13 个元素的上下集元素个数，再应用式（4）计算各元素的平均高度，计算结果见表 2.

表 2 平均高度计算值

Tab.2 calculation value of the Average height

	$\lvert O(x)\rvert$	$\lvert F(x)\rvert$	$\frac{\lvert F(x)\rvert}{\lvert O(x)\rvert}$	本文 $hav(x)$	文献[9] $hav(x)$
N_1	8	2	0.250	11.200	11.200
N_2	2	7	3.500	3.111	3.111
N_3	3	7	2.333	4.200	3.111
N_4	7	2	0.286	10.889	10.889
N_5	13	1	0.077	13.000	13.000
N_6	6	2	0.333	10.500	10.500
$N7$	6	5	0.833	7.636	8.400
N_8	4	2	0.500	9.333	9.333
N_9	3	9	3.000	3.500	3.500
N_{10}	8	2	0.250	11.200	11.200
N_{11}	2	11	5.500	2.154	2.333
N_{12}	4	4	1.000	7.000	7.000
N_{13}	1	13	13.000	1.000	1.000

原文上下元素个数的计算存在多处错误.样本 3 下集数是 3 而不是 2，样本 7 上集数是 5 而不是 4，样本 11 上集数为 11 而非 10. 其余 10 个元素平均高度计算结果与文本相同.本文的方法简便直观、易于计算，对于大规模的偏序集，很容易通过计算机编程来实现.

4 结论

关系矩阵与 Hasse 矩阵具有一一对应的关系，二者能够相互转换.在此基础上得到：

（1）对于任给一个元素的在偏序集上的上集个数等于关系矩阵对应列向量的和，下集元素的个数等于关系矩阵对应行向量的和.

（2）所有通过上下集构造的排序公式都可以用关系矩阵的行和列和进行表示.

（3）通过算例可以看出，新的计算方法无需借助与 Hasse 矩阵或者 Hasse 图，并且二者结论一致，但计算更为简单.

参考文献：

[1] LERCHE D,BRUGGEMANN R,SORENSEN P,CARLSEN L,NIELSEN O J. A comparison of partial order technique with three methods of multi-criteria analysis for ranking of chemical substances[J].J Chem. Inf. Comput.Sci.2002(42):1 086-1 098.

[2] CARLSEN L,BRUGGEMANN R. Accumulating partial order ranking[J]. Environmental Modelling & Software,2008(23):986-993.

[3] BRÜGGEMANN R,SØRENSEN P,LERCHE D,CARLSEN L, Estimation of averaged ranks by a local partial order mod-el[J].J.Chem. Inf. Comp. Sc.2004(44):618-625.

[4] BRUGGEMANN R, SIMON U,MEY S, Estimation of averaged ranks by extended local partial order models[J].MATCH Commun.Math.Comput. Chem,2005(54):489-518.

[5] LOOF K D,DEBAETS H,MEYER D. Approximation of Average Ranks in Posets[J].Match Commun.Math.Comput.Chem.2011(66):219-232.

[6] WINKLER P M. Average height in a partially ordered set[J].Discrete Mathematics,1982(39):337-341.

[7] WIJNKLER P M. Correlation among partial orders[J].Siam.J.Alg.Disc. Methods 1983,4(5):1-7.

[8] BRIGHTWELL G,WINKLER P .Counting Linear Extensions is #P-Complete[J]. Acm Symposium on Theory of Computing,1991,17(4):175-181.

[9] BRÜGGEMANN R,CARLSEN L. An improved estimation of averaged ranks of partial orders[J].MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry,2011(65):383-414.

[10] 范懿.一个有关哈斯图的解析方法[J].上海第二工业大学学报，2003,1(1):17-22.
FAN Yi. An analytic methord about Hasse Chart[J].Journal of SHANG HAI second polytechnic university,2003,1(1):17-22.

[11] 杜康.偏序集分拆函数的计算及其算数性质[D].天津:南开大学，2013:1-5.

[12] 张文修,仇国芳.基于粗糙集的不确定性决策[M].北京:清华大学出版社,2005.

[13] 杨学男,郭春香.基于偏序线性扩张的群决策方法[J].西南科技大学学报,2007,22(2):86-91.
YANG Xuenan,GUO Chunxiang. Approach to group decision-making based on partial order linear extensions[J].Journal of Southwest University of Science and Technology,2007,22(2):86-91.